Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

14. Übungsblatt: Iterative Lösung von Gleichungssystemen

Übungsaufgaben für die Tutorien (02.02.-05.02.2016):

Aufgabe 1:
Geben Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ die Iterationsmatrix S und deren Spektralradius an; einmal für das Gesamtschrittverfahren und einmal für das Einzelschrittverfahren. Führen Sie mit jedem Verfahren einen Schritt aus mit Startwert $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und rechter Seite $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung von $Ax = 0$ für den Startwert $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, indem sie jeweils eine allgemeine Darstellung für die n-te Iterierte angeben.

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3:
Betrachte das Splitting

$$A = (1 + \omega)B - (C + \omega B)$$

und $B^{-1}C$ sei nichtsingulär und habe positive reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1.$$

1. Für welche $\omega \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ konvergiert das Splitting-Verfahren

   $$(1 + \omega)Bx^{(i+1)} = (C + \omega B)x^{(i)} + b$$

   für alle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$?

2. Für welches ω ist die Konvergenzrate maximal, d.h. $\rho(S)$ minimal, wobei S die Iterationsmatrix des Verfahrens ist?