Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

12. Übungsblatt: Newton-Verfahren, Fixpunktiteration

Übungsaufgaben für die Tutorien (19.01.-22.01.2016):

Aufgabe 1:
Führen Sie eine Iteration des Newton-Verfahrens aus, um das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \exp(x^2 - y^2) - 3 &= 0 \\ x + y - \sin(2(x+y)) &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = \pi$ und $y_0 = \pi$. An welcher Stelle ist das Differential singulär?

Aufgabe 2:
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1 = 0, \quad \frac{10\,x_1}{x_1 + 0.1} + 2x_2^2 = 0,$$

dessen eindeutig bestimmte Lösung $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ist.

(a) Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $(0, 1)$ einen Newton-Schritt durch.

(b) Konvergiert das Newton-Verfahren in diesem Beispiel für alle genügend nahe an der Lösung liegenden Startvektoren? Geben Sie die maximale Teilmenge aller Punkte in der offenen Kugel um den Ursprung mit Radius 1/10, d.h. $U_{1/10}(0) = \{(x_1, x_2) \,|\, \|(x_1, x_2)\|_2 < 1/10\}$ an, so dass das Verfahren auf dieser Menge konvergiert.

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal-stetig differenzierbare Funktion und $x^* \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(x^*) = 0$ aber $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$\begin{aligned} y &:= x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k) \\ x_{k+1} &:= y - f'(x_k)^{-1} f(y) \end{aligned}$$

definierte Folge mindestens mit Ordnung 3 gegen x^* konvergiert.
Hinweis: Beschreiben Sie das Verfahren als Fixpunktiteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ und zeigen Sie, dass die Ableitungen $\phi'(x)$ und $\phi''(x)$ an der Stelle x^* verschwinden. Die Produktregel für drei Faktoren lautet: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.