Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

12. Übungsblatt: CG

Hausaufgaben: (Abgabe 10. Februar <u>14:10 - 14:15</u> in Raum MA 042)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Die Iterationsvorschrift des CG-Verfahrens zur Lösung von min $\frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$ ist

$$x_{m+1} = x_m + \alpha d_m$$

mit der optimalen Schrittweite α.
Sei $x^* = A^{-1}b$ die exakte Lösung.
Sei weiterhin aus der Vorlesung bekannt, dass $x^* - x_{m+1}$ A-orthogonal auf d_m steht und die d_m eine Orthogonalbasis bezüglich des A-Skalarproduktes bilden. Beweise: $x^* - x_m$ ist A-orthogonal auf $d_0, d_1, ..., d_{m-1}$.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Sei T_m das m-te Tschebyscheff-Polynom. Zeige, dass für jedes Polynom P von maximalem Grad m gilt: Falls $|P(x)| < 1$ für alle $x \in [-1, 1]$, dann folgt $|T_m(y)| \geq |P(y)|$ für alle $|y| > 1$.
Hinweis: fast genauso wie der ähnliche Satz aus der Vorlesung beweisbar.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Zeige:

$$T_m\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right)$$

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Für das CG-Verfahren gilt die Konvergenzrate

$$||e_m||_A = \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^m ||e_0||_A$$

wobei κ die Kondition der Matrix A in der euklidischen Norm ist und $e_i := x_i - x^*$ der Fehler nach der i-ten Iteration. Sei nun die Kondition von A in einem konkreten Fall $\kappa(A) = 9$ und $||e_0||_2 = 1$. Wie viele Iterationen benötigt das CG-Verfahren, um den Fehler in der euklidischen Norm unter die Rechnergenauigkeit zu bringen, wobei die verwendeten Gleitkommazahlen, die des Standard IEEE 754 64-bit sind?
Welcher Gesamtaufwand ergibt sich, wenn A dünn/dicht besetzt ist? Dünn besetzt, bedeutet dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $O(n)$ Nichtnulleinträge hat.