Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

11. Übungsblatt: Transformationssatz, Newton

Hausaufgaben: (Abgabe 27. Januar 14:10 - 14:15 in Raum MA 042)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$\int_0^3 f(x)dx$$

existiert. Gib eine Funktion g und eine Konstante C an, so dass

$$\int_0^3 f(x)dx = C \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$. Berechne

$$\int_M x^2$$

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Berechne lediglich mit Stift und Papier $\sqrt{2}$ auf 3 Nachkommastellen. Beweise die Korrektheit der insgesamt 4 Stellen, also zum Beispiel dass für eure Näherung x gilt

$$|x - \sqrt{2}| < 0{,}001\,.$$

Aufgabe 3: **(2 extra Punkte)**
Berechne lediglich mit Stift und Papier $\sin(1)$ auf eine Nachkommastelle. Beweise die Korrektheit der Nachkommastelle. Hinweis:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Schreibe einen Algorithmus, der die für die FFT benötigte Einheitswurzel

$$\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

berechnet, wobei n eine Zweierpotenz ist. Der Algorithmus darf keine trigonometrischen Funktionen verwenden. Die reelle Quadratwurzel, Division, Addition, Subtraktion und Multiplikation sind erlaubt. Wichtiger als der endgültige Pseudocode ist der Korrektheitsbeweis. Es sollten nicht mehr als $2\log_2(n)$ Quadratwurzeln verwendet werden.

Aufgabe 5: **(5 Punkte)**
Ein Gleitkommaformat mit impliziter Eins (normalisierte Darstellung) habe eine Mantissenlänge von 11 bit und eine Exponentenlänge von 4 bit und ein Vorzeichenbit. Wie groß ist der maximale relative

Rundungsfehler einer Maschinenoperation.

Gib die Spiegelung an, die $(1,3)^T$ auf $(3,-1)^T$ abbildet.

Gib eine allgemeine Formel an, für eine Spiegelung an einer Hyperebene, die den Punkt $v \in \mathbb{R}^n$ auf den Punkt $w \in \mathbb{R}^n$ abbilden soll. (Hinweis: v und w müssen im allgemeinen Fall nicht gleich lang sein und die Hyperebene muss nicht durch den Ursprung gehen.)

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 4. Februar 2016)
Schreiben Sie ein Programm

`NewFrak(n,l,ep,N)`,

welches graphisch darstellt, gegen welche Nullstelle der Funktion

$$p(z) = z^N - 1, \tag{1}$$

das Newtonverfahren in Abhängigkeit des Startwertes konvergiert. In (1) ist $z \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$. Die Eingabe Parameter sind wie folgt zu verstehen:

(i) `(n,l)` diskretisieren die Menge der Startwerte
$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} | |Re(z)| \leq n,\ |Im(z)| \leq n,\ \exists (h,j) \in \mathbb{Z}^2\ s.d.\ z = hl + i \cdot jl\}$

(ii) `ep` beschreibt den Radius der Kugel um die Exakte Lösung, ab der das Newtonverfahren abgebrochen werden kann

(iii) `N` beschreibt den Grad des komplexen Polynoms aus (1) von dem die Nullstellen approximiert werden sollen.

Dieses Programm soll keine Ausgabe besitzen sondern direkt einen entsprechenden Plot erzeugen. Mögliche eingaben sind:

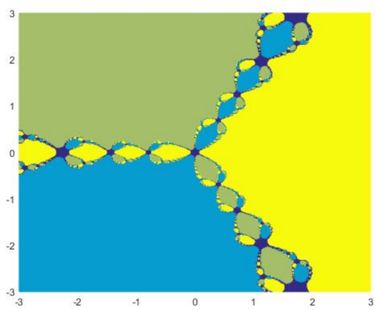

Abbildung 1: NewFrakN(3,0.01,0.5,3)

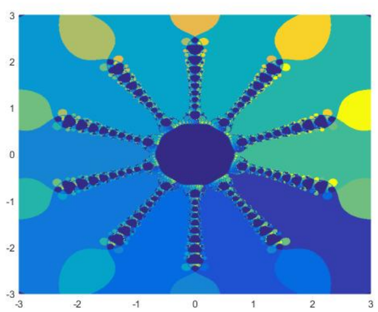

Abbildung 2: NewFrakN(3,0.01,0.5,10)