

Numerische Mathematik I
10. Übungsblatt: Numerische Integration

Übungsaufgaben für die Tutorien (05.01-08.01.2016):

Aufgabe 1:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Sei F Stammfunktion zu f , d.h. $F' = f$. Seien $x, h \in \mathbb{R}$ mit $[x - h, x + h] \subseteq [a, b]$. Zeige:

$$F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) = hf(x) + \frac{h^3}{24} \frac{f''(\theta_+) + f''(\theta_-)}{2}$$

für geeignet zu wählende $\theta_+, \theta_- \in [a, b]$.

- (b) Sei $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_l \in [a, b]$. Dann existiert ein $\theta \in [a, b]$, so dass

$$f''(\theta) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f''(\theta_i).$$

- (c) Sei $z_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$. Dann gilt

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(t) dt - hf\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\theta_i)$$

für ein geeignetes $\theta_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, N - 1$.

- (d) Sei $M(h) = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right)$ (Summierte Mittelpunktsregel). Dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt - M(h) = (b-a) \frac{h^2}{24} f''(\theta),$$

wobei $\theta \in [a, b]$ geeignet zu wählen ist.

Aufgabe 2:

Sei $a \leq x_0 < \dots < x_N \leq b$. Zeigen Sie, dass eine Quadraturformel $Q_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^N f(x_k) \sigma_k$ höchstens einen Genauigkeitsgrad von $2N + 1$ haben kann.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Parameter α, β und x, y so, dass die Quadraturformeln

(a) $Q_0^1(f) = \alpha f(0) + \beta f'(y)$ auf dem Intervall $[0, 1]$

(b) $Q_{-1}^1(f) = \alpha(f(x) + f(-x)) + \beta f'(y)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$

möglichst hohen Genauigkeitsgrad haben. Bestimmen Sie den maximalen Genauigkeitsgrad.