Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

10. Übungsblatt: DCT, FFT, Quadratur

Hausaufgaben: (Abgabe 20. Januar 14:10 - 14:15 in Raum MA 042)

Aufgabe 1: **(0 Punkte)**
Die diskrete Kosinustransformation ist durch

$$(DCT(f))_j := \sum_{k=0}^{n-1} f_k \, cos\left(\frac{\pi}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) j\right)$$

definiert, wobei die Stützstellen

$$x_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$$

gewählt werden.
Zeige, dass wir diese DCT mit Hilfe unserer DFT durch

$$(DCT(f))_j = 2n\left(DFT(\hat{f})\right)_j$$

berechnen können, wobei

$$\hat{f} = (0, f_0, 0, f_1, 0, f_2, 0, ..., f_{n-1}, 0, f_{n-1}, 0, f_{n-2}, ..., 0, f_1, 0, f_0)\,.$$

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Schreibe in Pseudocode oder Matlab einen iterativen (das heißt ohne Rekursion, Schleifen sind erlaubt) Algorithmus, der die DFT berechnet und mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Operationen auskommt.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Führe die Polynomdivision mit Rest durch, um $P : x \mapsto (3x^3 + x^2 + 2x - 5)$ durch $S : x \mapsto (x-2)$ zu teilen. Gesucht sind also Polynome Q und R, so dass $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, wobei der Grad von R echt kleiner als der Grad von S sein muss. Versuche, wenn möglich, dies ohne Literatur zu tun. Wenn nötig, übe dies mit selbstgewählten Polynomen. Dividiere 1 durch 3, 1 durch 5 und 1 durch 7 im Binärsystem per schriftlicher Division. Wenn nötig, übe dies.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
(Dahmen/Reusken Übung 10.6.1) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ sowie $\xi : [a, b] \to [a, b]$ messbar gegeben. Zeige: Es existiert ein $z \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(\xi(x))g(x)dx = f(z)\int_a^b g(x)dx$$

gilt.

Aufgabe 5: **(5 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle von $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Zeige, dass

$$\frac{1}{6}\left(P(\frac{1}{2}, 0) + P(0, \frac{1}{2}) + P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) = \int_\Omega P(x, y)dxdy$$

für alle Polynome $P \in \text{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ von maximalem Grad 2.