

## Numerische Mathematik I

### 8. Übungsblatt: Pseudoinverse, Polynominterpolation

#### Übungsaufgaben für die Tutorien (08.12.-11.12.2015):

##### Aufgabe 1:

(Für das Tutorium von Jeroen Stolwijk.) Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit Rang  $r$ ,  $A = U\Sigma V^T$  eine Singulärwertzerlegung und  $A^+ = V\Sigma^+U^T$  ihre Pseudoinverse. Man zeige:

- (i)  $AA^+$  ist die orthogonale Projektion auf  $\text{Bild}(A)$ .
- (ii)  $A^+A$  ist die orthogonale Projektion auf  $\text{Kern}(A)^\perp$ .

Zur Erinnerung: Die orthogonale Projektion  $P$  eines Vektorraums  $V$  auf einen Unterraum  $U$  ist definiert durch:  $P(v) \in U$  und  $P(v) - v \in U^\perp$  für alle  $v \in V$ .

##### Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen

$$a) \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -3 & -1 & 2 \\ \hline f_i & 10 & -6 & 15 \end{array} \quad b) \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 2 \\ \hline f_i & -3 & 4 & 6 \end{array}$$

einmal mit Hilfe der Lagrange-Basis Funktionen und einmal mit der Methode von Newton.

##### Aufgabe 3:

Sei  $p(x)$  ein Polynom dritten Grades, das die Funktion  $f(x) = \frac{1}{a^2-x}$  in den Stützstellen  $\{-4, -3, -2, -1\}$  interpoliert. Bestimmen Sie alle Werte von  $a$ , so dass

$$|f(x) - p(x)| \leq 10^{-5} \quad \text{für alle } x \in [-4, -1].$$