Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

8. Übungsblatt: Bestapproximation, Hermite-Interpolation

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 16. Dezember 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**

Zeige, dass die Frobeniusnorm submultiplikativ ist und dass

$$||UA||_F = ||A||_F$$

gilt, falls U orthogonal ist.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die x_i alle voneinander verschieden und sei

$$q_i : x \mapsto \prod_{j \neq i} (x - x_j)^2$$

das Quadrat des nichtnormierten i-ten Lagrangepolynoms. Zeige, dass dann

$$g_i : x \mapsto \frac{q_i(x)}{q_i(x_i)} \left(\left(1 - (x - x_i) \frac{q_i'(x_i)}{q_i(x_i)} \right) f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) \right)$$

die Funktion f und f' in x_i interpoliert, sowie an allen anderen x_j verschwindende Ableitung und Werte hat.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**

Die Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms ist

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \ .$$

Definiere nun

$$f[x] := f(x)$$
$$f[x,x] := f'(x)$$
$$f[x,...,x] := f^{(k)}(x)$$

und zeige, dass man durch Wiederholung einer Stützstelle in der Newtonschen Darstellung die Ableitungen von f wie in Aufgabe 2 mitinterpolieren kann. Die dividierten Differenzen seien wie gewohnt rekursiv durch

$$f[x_{i_0}, .., x_{i_n}] := \frac{f[x_{i_1}, .., x_{i_n}] - f[x_{i_0}, .., x_{i_{n-1}}]}{x_{i_n} - x_{i_0}}$$

definiert.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**

(Dank an Ché für diese Aufgabe.) Gewinne den Satz von Taylor (Form des Taylor-Polynoms und Darstellung des Restglieds nach Lagrange) aus der Hermite-Interpolation und der zugehörigen Restgliedformel

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$