**Technische Universität Berlin** **Wintersemester 2015/2016**
**Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften**
**Institut für Mathematik**
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

# Numerische Mathematik I

## 7. Übungsblatt: QR-Zerlegung, Lineare Ausgleichsprobleme, Singulärwertzerlegung

**Übungsaufgaben für die Tutorien (01.12.-04.12.2015):**

**Aufgabe 1:**
Sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $U$ als Produkt von Householdermatrizen geschrieben werden kann.
Was bedeutet dies für die Speicherung von orthogonalen Matrizen?

**Aufgabe 2:**
Gegeben seien die folgenden Daten:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 0 |

Bestimmen Sie das quadratische Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, welches die Summe des Fehlers

$$\sum_{i=0}^{3} (p(x_i) - y_i)^2$$

minimiert. Lösen Sie dazu die zugehörige Normalengleichung mittels eine Cholesky-Zerlegung der auftretenden Matrix.

**Aufgabe 3:**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang $r$, $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung und $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ ihre Pseudoinverse. Man zeige:

(i) Ist $A$ regulär, dann gilt $A^+ = A^{-1}$.

(ii) Ist $r = n$, dann $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

(iii) $AA^+$ ist die orthogonale Projektion auf $\text{Bild}(A)$.

(iv) $A^+A$ ist die orthogonale Projektion auf $\text{Kern}(A)^\perp$.

Zur Erinnerung: Die orthogonale Projektion $P$ eines Vektorraums $V$ auf einen Unterraum $U$ ist definiert durch: $P(v) \in U$ und $P(v) - v \in U^\perp$ für alle $v \in V$.