Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

7. Übungsblatt: Pseudoinverse, Lagrangepolynome

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 9. Dezember 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert eine eindeutige Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so dass:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A$$

Sei nun $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ die Menge aller $n \times m$-Matrizen von vollem Rang und $\varphi : \mathbb{R}_*^{n\times m} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ die Funktion, die eine Matrix von vollem Rang auf ihre Pseudoinverse abbildet. Zeige, dass φ stetig ist.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Es seien $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,...,n}$ eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$ für die alle x_i paarweise verschieden sind. Dazu haben wir in der Übung die Lagrangeschen Basispolynome

$$l_j : x \mapsto \prod_{m\neq j} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$$

definiert. Finde die von l_j abhängige Darstellung des Interpolationspolynoms P $(n-1)$-ten Grades, so dass $P(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, ..., n$.
Interpoliere die Punkte $(0, 2)$, $(2, 2)$ und $(3, \frac{7}{2})$ mit einem Polynom zweiten Grades mithilfe der Lagrangschen Basispolynome. Wie könnte man vorgehen, wenn man 4 Punkte durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren möchte und dafür in Kauf nimmt, die Punkte nicht ganz genau zu treffen?

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Sei f eine n-mal differenzierbare Funktion, für die $f(x_i) = y_i$ für die Punkte aus Aufgabe 2 gilt. Der Interpolationsfehler $R(x) = f(x) - L(x)$ ist durch

$$R(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad x_1 < \xi < x_n$$

gegeben, falls die x_i aufsteigend geordnet sind. Wo muss man die (zwei) Stützstellen x_i wählen, so dass die Funktion $f : x \mapsto \sin x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ in der Maximumnorm, also punktweise möglichst genau durch ein Polynom ersten Grades interpoliert wird?

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Es sei $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,...,m}$ eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^n$. Es seien P_1 und P_2 Polynome vom Grad $m-2$, so dass P_1 alle (x_i, y_i) für $i = 1, ..., m-1$ interpoliert und P_2 alle Punkte für $i = 2, ..., m$. Das heißt also

$$P_1(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, ..., m-1$$

$$P_2(x_i) = y_i \quad \forall i = 2, ..., m$$

Finde nun ein Polynom P vom Grad $m-1$, welches alle Punkte interpoliert, also für das

$$P(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, ..., m$$

gilt. Notiere insbesondere auch deinen Ansatz, also wie du auf die Idee gekommen bist, statt nur für die endgültige Formel alle Eigenschaften nachzuprüfen.