Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

6. Übungsblatt: QR, Ausgleichsprobleme, Rang

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 2. Dezember 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Sei $n \leq m$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix von Rang r. Sei außerdem $(\bar{a}_i)$ eine Basis des Spaltenraums von A. Zeige, dass dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle B mit $||B - A|| < \varepsilon$ und $\text{rang}(B) \leq r$ es eine eindeutige Basis des Spaltenraums $(\bar{b}_i)$ gibt, so dass $\bar{b}_i = \bar{a}_i + x_i$ wobei x_i orthogonal auf dem Spaltenraum von A steht.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Seien $V_1, V_2, ..., V_{d+1}$ endlich dimensionale Vektorräume und $f_i : V_i \to V_{i+1}$ lineare Abbildungen von Rang r_i. Was lässt sich ohne zusätzliches Wissen über den Rang von $f_d \circ f_{d-1} \circ \cdots \circ f_1$ aussagen? Zeige auch, dass diese Aussage scharf ist, also nicht durch eine schärfere Aussage verbessert werden kann.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Zeige, wie man mit Hilfe der QR-Zerlegung für rechteckige Matrizen (siehe Aufgabe 3 auf fünftem Aufgabenblatt) folgendes Problem lösen kann: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n \geq m$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Minimiere $||Ax - b||_2$.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Berechne ber Hand die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

und vergleiche die Lösung mit der eures Algorithmus der Programmieraufgabe. Berechne insbesondere auch die Matrix Q mit Hilfe des Programms `qtmult`.

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 10. Dezember 2015)

Schreibe ein Programm `qrzerlegung`, das die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}(n \geq m)$ mit $\text{rang}(A) = m$ mit Hilfe von Householdermatrizen berechnet wobei $Q = \prod_{i=1}^{m} H(v^{(i)})$, $H(v) = I - 2vv^T$ und $||v^{(i)}||_2 = 1$ für alle $i = 1, ..., m$. Der Aufruf soll mit

```
[QR,d]=qrzerlegung(A)
```

erfolgen. Die Eingabe ist:

`A` - eine $n \times m$ Matrix.

Die Rückgabe ist:

5 - eine Matrix der Größe $n \times m$. Dabei steht im oberen Dreieck von `QR` die oberen Einträge von R. In der Spalte $i = 1, ..., m$ stehen jeweils in den Zeilen $i + 1, ..., n$ die entsprechenden Einträge des Vektors $v^{(i)}$.

`d` - ein Vektor der Größe m, der die Einträge $v_i^{(i)},\ i = 1, ..., m$ enthält.

Es sollen keine zusätzlichen Matrizen im Algorithmus erzeugt werden, sondern die Einträge von `QR` gleich in `A` abgespeichert werden.

Schreibe ein Programm `qtmult`, das die Anwendung von Q^T auf einen Vektor b, d.h. $y = Q^T b$, implementiert. Dabei soll Q in Form von Householdervektoren abgespeichert sein. Der Aufruf soll mit

```
y = qtmult(QR,d,b)
```

erfolgen. Die Eingaben `QR` und `d` stammen hierbei aus dem Programm `qrzerlegung`. Die Berechnung von $Q^T b$ soll einen Aufwand von $\mathcal{O}(nm)$ nicht übersteigen.

Schreibe ein Programm `ausgleich` das mit Hilfe der Programme `qrzerlegung` und `qtmult` das Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 = min$ löst. Der Aufruf soll mit

```
x = Ausgleich(A,b)
```

erfolgen. Die Eingabe ist:

`A` - Matrix A der Größe $n \times m$

`b` - Vektor b der Länge n.

Die Rückgabe ist:

`x` - Vektor x der Länge m.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, z.B. für die Multiplikation mit einer einzelnen Householdermatrix $H(v)$, ein eigenes Unterprogramm zu schreiben. Außerdem soll das Programm `rueckwaerts` verwendet werden.