Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

5. Übungsblatt: Matrixzerlegungen, Normen, Rang

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 25. November 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
Sei $n \leq m$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix von Rang r. Sei außerdem $(\bar{a}_i)$ eine Basis des Spaltenraums von A. Zeige, dass dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle B mit $||B - A|| < \varepsilon$ es eine eindeutige Basis des Spaltenraums $(\bar{b_i})$ gibt, so dass $\bar{b_i} = \bar{a}_i + x_i$ wobei x_i orthogonal auf dem Spaltenraum von A steht.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische, relle Matrix von Rang r. Sei nun $A = A_1, A_2, A_3, ...$ eine Folge von Matrizen, die folgende Vorschrift erfüllen: $A_{i+1} = A_i - v \cdot w$ wobei a_{kl} ein betragsmäßig größtes Element von A_i sei, w die k-te Zeile von A_i und $v_j = \frac{a_{jl}}{a_{kl}}$ falls $a_{kl} \neq 0$ und $v_j = 0$ sonst. Am Ende können wir auf diese Weise A als Summe von Rang-1-Matrizen darstellen. Beweise oder widerlege, dass nur endlich viele A_i ungleich 0 sind. Wie viele sind das? Hinweis: Wie hängt dieser Algorithmus mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren zusammen.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Verallgemeinere die QR-Zerlegung auf Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $n \geq m$. Ausgehend davon zeige, wie man mithilfe der QR-Zerlegung eine Menge von Vektoren $(d_i)_{i=1,...,r}$ orthonormalisieren kann.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Eine reelle Matrix heißt normal, falls $AA^T = A^TA$. Sie heißt diagonalisierbar, falls die Zerlegung $A = SDS^{-1}$ möglich ist mit invertierbarer Matrix S und Diagonalmatrix D. Beweise oder wiederlege:

(i) Falls für die reelle Matrix A $A = QDQ^T$ mit orthogonalem Q und diagonalem, reellem D gilt, so ist sie symmetrisch und auch normal.

(ii) Für normale Matrizen gibt es eine Basis von Eigenvektoren die orthogonal aufeinander stehen.

(iii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen immer orthogonal aufeinander.

(iv) Diagonalisierbare Matrizen sind normal.