Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

4. Übungsblatt: LR-Zerlegung, Cholesky-Zerlegung

Übungsaufgaben für die Tutorien (10.11.-13.11.2015):

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} R & v \\ w^T & 0 \end{bmatrix}, \quad R \in \mathbb{R}^{n\times n},\ v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Zusätzlich sei R eine invertierbare obere Dreiecksmatrix.

(a) Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix A an.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann nichtsingulär ist, wenn $w^T R^{-1} v \neq 0$.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, und sei $A = GG^T$ die Cholesky-Zerlegung von A. Zeigen Sie:

(i) $\|G\|_2^2 = \max_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq g_{ii}^2, \quad$ für alle $i = 1, \dots, n$,

(ii) $\frac{1}{\|G^{-1}\|_2^2} = \min_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq g_{ii}^2, \quad$ für alle $i = 1, \dots, n$,

(iii) $\kappa_2(G) \geq \max_{i,j} \frac{g_{ii}}{g_{jj}}$.