

Numerische Mathematik I  
4. Übungsblatt: Givens, SVD

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 18. November 2015)

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Finde alle orthogonalen Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , die den Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  auf ein Vielfaches von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  abbilden. Diejenigen dieser Matrizen, die Rotationen sind, heißen Givens-Rotationen.

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $|a| \geq |c| \neq 0$  und  $|a| \geq |d|$  eine Matrix. Zeige, dass es eine orthogonale Matrix  $U$  wie aus Aufgabe 1 gibt, so dass für  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = U \cdot A$  gilt:  $|a'| \geq |a|$ ,  $|c'| \leq |d|$ ,  $|b'| \leq |d|$  und  $|d'| \leq |d|$ . Zeige, dass man das gleiche mit einer Rechtsmultiplikation  $A \cdot V$  machen kann, falls  $A$  die Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  hat.

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Seien  $U$  und  $V$  die Givens-Rotationen aus Aufgabe 1 und 2 für eine  $2 \times 2$ -Matrix und  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , wobei  $|b| + |c| \neq 0$ . Zeige oder widerlege folgende Aussage:  
Der Winkel zwischen den Zeilen von  $U \cdot A$  ist größer als der Winkel zwischen den Zeilen von  $A$  oder der Winkel zwischen den Spalten von  $A \cdot V$  ist größer als der Winkel zwischen den Spalten von  $A$ .

**Aufgabe 4:** (5 Punkte)

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $m \leq n$  existiert eine Zerlegung  $A = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot V$ , wobei  $U$  und  $V$  orthogonale Matrizen und  $\Sigma = \text{diagonal}$  und  $\mathbf{0}$  eine rechteckige Nullmatrix ist. Diese Zerlegung heißt Singulärwertzerlegung.

Erkenne die Singulärwertzerlegung folgender Matrizen durch Einzeichnen der Bilder der Einheitsvektoren unter der Abbildung  $x \mapsto A \cdot x$  in den  $\mathbb{R}^2$ :

(i)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(ii)  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

**Programmieraufgabe 1:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 26. November 2015)

Implementiere die Rotationen aus Aufgabe 1 für eine  $2 \times 2$ -Matrix:

`A=givens_rows(A)`

soll eine linksmultiplikative Givensrotation, und

`A=givens_columns(A)`

eine rechtsmultiplikative anwenden.

Berechne approximativ die Singulärwerte einer gegebenen Matrix  $A$  durch iterative Anwendung von Givens-Rotationen. Die Funktion

`S=sigma(A)`

soll die Diagonalmatrix der Singulärwertzerlegung (siehe Aufgabe 4) ausgeben. Dafür ist es hilfreich, die Funktionen

`A=swap_columns(A)`

und

`A=swap_rows(A)`

zu implementieren, welche die Spalten bzw. die Zeilen von  $A$  vertauschen. Die Lösung kann mit Hilfe des Befehls

`svd(A)`

überprüft werden.

Modifiziere des weiteren den LR-Algorithmus mit Pivotisierung, so dass er nur Givens-Rotationen verwendet.

**Programmieraufgabe 2:** (Zusatzaufgabe, absolut freiwillig und nicht ganz einfach, zählt nicht für die obligatorischen 2 Programmieraufgaben pro Person)

Implementiere einen Algorithmus, der die Singulärwertzerlegung einer  $3 \times 3$  oder beliebig großen Matrix mittels Givensrotationen und Zeilen-/Spaltenvertauschungen iterativ berechnet.