Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

3. Übungsblatt: Cholesky, Householder, Normen

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 11. November 2015)

Aufgabe 1: **(10 Punkte)**

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

wobei A eine LR-Zerlegung mit Faktoren der angegebenen Form besitzt.

(a) Bestimme die Rekursionsformeln für $(\alpha_i)_{i=2,\dots,n}$, $(\beta_i)_{i=1,\dots,n}$ und $(\gamma_i)_{i=1,\dots,n-1}$ der Zerlegung $A = LR$. Gib die Anzahl der Gleitkommaoperationen an, die für die Berechnung der LR-Zerlegung benötigt werden.

(b) Bestimme Rekursionsformeln für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung. Gib die Anzahl der Gleitkommaoperationen an, die für die Lösung notwendig sind.

(c) Bestimme die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, falls diese existiert.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeige, dass durch $||x||_Q := < x, Qx >^{\frac{1}{2}}$ eine Norm definiert ist, wobei $< \cdot, \cdot >$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ sei.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**

Nutze eine Spiegelung Q, um die QR-Zerlegung folgender Matrix zu berechnen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$