

## Numerische Mathematik I

### 2. Übungsblatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

#### Übungsaufgaben für die Tutorien (27.10-30.10.2015):

##### Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
- $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$
- $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$
- $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

##### Aufgabe 2:

Es bezeichne  $\|\cdot\|$  eine Vektornorm auf dem  $\mathbb{R}^n$  und gleichzeitig

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

die induzierte Matrixnorm. Es bezeichnen  $A, B$  geeignete Matrizen und  $b \neq 0$  einen Vektor mit passenden Dimensionen. Zeigen Sie:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ,
- $\frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$ .

Ausserdem zeigen Sie, dass für die speziellen Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_F$  gilt:

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$  (wobei  $\lambda_{\max}(A)$  den größten Eigenwert von  $A$  bezeichnet)
- $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ , d.h. Submultiplikativität der Frobeniusnorm,
- $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$ , für alle  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ , d.h. Verträglichkeit von  $\|\cdot\|_F$  mit  $\|\cdot\|_2$ ,
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ .

##### Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Kondition der Matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  bezüglich  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_F$ .

##### Aufgabe 4:

Sei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Berechnen Sie die LR-Zerlegung von  $A$ .
- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ .
- Berechnen Sie die LR-Zerlegung von  $A$  mit partieller Pivotisierung.