Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

2. Übungsblatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 4. November 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**
In der Übung haben wir die relative Kondition einer Funktion f definiert als

$$\frac{||f'(x)|| \cdot ||x||}{||f(x)||} \tag{1}$$

Zeige nun, dass für eine invertierbare lineare Funktion $f : x \to Ax$ die maximale relative Kondition gegeben ist durch

$$||A|| \cdot ||A^{-1}|| \tag{2}$$

wobei

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \tag{3}$$

Dies nennen wir auch die Kondition $\kappa(A)$ der Matrix A.

Wir können zum Beispiel von den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ die Kondition analytisch bestimmen und dann 'a posteriori', d.h. in Abhängigkeit der berechneten Näherungslösung den Fehler der Lösung des Systems $Ax = b$ abschätzen durch

$$\frac{||x - \hat{x}||}{||x||} \leq \kappa(A) \cdot \frac{||Ax - A\hat{x}||}{||Ax||} \tag{4}$$

wobei $\hat{x}$ die berechnete Näherungslösung ist. Siehe Yserentant-Mitschrift. Ungleichung (4) soll gezeigt werden, die Kondition der Matrix A muss nicht berechnet werden.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Gilt die folgende Gleichung, wobei die I_i Einheitsmatrizen sind und B ebenfalls eine Matrix ist?

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ B & I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -B & I_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Gilt die folgende Gleichung?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Gilt für eine Permutationsmatrix P immer $P = P^{-1}$?

Aufgabe 3: **(10 Punkte)**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 21 & 22 \\ 8 & 16 & 36 & 44 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 23 \\ 124 \\ 61 \\ 196 \end{bmatrix}$.

1. Bestimmen Sie per Hand die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung.
2. Bestimmen Sie per Hand die LR-Zerlegung $LR = PA$ von A mit Spaltenpivotisierung sowie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 12. November 2015)

Schreiben Sie ein Programm `gauss_plr` das die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet: $LR = PA$. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor geeignet abgespeichert werden. Der Aufruf soll mit

```
[LR,piv]=gauss_plr(A)
```

erfolgen, wobei die Ausgabe `LR` eine Matrix der Größe $n \times n$ ist, in dessen unterem Dreieck L und in dessen oberen Dreieck R abgespeichert ist. `piv` soll ein Vektor der Länge n sein, der die Pivotisierung P beschreibt.
Schreiben Sie Programme `vorw\"arts` und `r\"uckw\"aerts` die ausgehend von der berechneten LR-Zerlegung die Gleichungssysteme $Lz = Pb$ und $Rx = z$ lösen:

```
z=vorwaerts(LR,piv,b), x=rueckwaerts(LR,piv,z)
```

Schreiben Sie ein Programm

```
x=gauss(A,b)
```

welches die obigen Programme kombiniert um $Ax = b$ zu lösen. Testen Sie ihr Programm an dem System aus Aufgabe 3. Geben Sie Zwischenschritte des Algorithmus aus und verleichen Sie sowohl die Zwischenschritte als auch die Lösung mit ihrer schriftlichen Lösung. Untersuchen Sie experimentell die asymptotische Laufzeit Ihres Algorithmus' und vergleichen Sie diese mit der Octave/Matlab-Routine `A\b`. Hinweis: `rand, tic, toc`.