Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

Klausuraufgabenvorschläge

leichte Aufgaben:

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**

Gilt die folgende Gleichung, wobei die I_i Einheitsmatrizen sind und B ebenfalls eine Matrix ist?

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ B & I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -B & I_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Gilt die folgende Gleichung?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Gilt für eine Permutationsmatrix P immer $P = P^{-1}$?

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**

Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$\int_0^3 f(x)dx$$

existiert. Gib eine Funktion g und eine Konstante C an, so dass

$$\int_0^3 f(x)dx = C \cdot \int_a^b g(x)dx$$

g soll nur von f abhängen und C soll nur von a und b abhängen.

Nutze eine Spiegelung Q, um die QR-Zerlegung folgender Matrix zu berechnen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Gib eine allgemeine Formel an, für eine Spiegelung an einer Hyperebene, die den Punkt $v \in \mathbb{R}^n$ auf den Punkt $w \in \mathbb{R}^n$ abbilden soll. (Hinweis: v und w müssen im allgemeinen Fall nicht gleich lang sein und die Hyperebene muss nicht durch den Ursprung gehen.)

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**

Ein Gleitkommaformat mit impliziter Eins (normalisierte Darstellung) habe eine Mantissenlänge von 11 bit und eine Exponentenlänge von 4 bit und ein Vorzeichenbit. Wie groß ist der maximale relative Rundungsfehler einer Maschinenoperation.

Führe die Polynomdivision mit Rest durch, um $P : x \mapsto (3x^3 + x^2 + 2x - 5)$ durch $S : x \mapsto (x - 2)$ zu teilen. Gesucht sind also Polynome Q und R, so dass $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, wobei der Grad von R echt kleiner als der Grad von S sein muss. Wenn nötig, übe dies mit selbstgewählten Polynomen.
Dividiere 1 durch 3, 1 durch 5 und 1 durch 7 im Binärsystem.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**

Interpoliere die Punkte $(0,2)$, $(2,2)$ und $(3, \frac{7}{2})$ mit einem Polynom zweiten Grades mithilfe der Lagrangschen Basispolynome. Finde ein Polynom ersten Grades, für das die Summe der Quadrate der Fehler an den Stützstellen minimal ist.

Aufgabe 5: **(5 Punkte)**
Wo muss man die (zwei) Stützstellen x_i wählen, so dass die Funktion $f : x \mapsto \sin x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ in der Maximumnorm, also punktweise möglichst genau durch ein Polynom ersten Grades interpoliert wird?

Aufgabe 6: **(10 Punkte)**

Bestimme die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, falls diese existiert.

Aufgabe 7: **(5 Punkte)**
Berechne lediglich mit Stift und Papier $\sqrt{2}$ auf 3 Nachkommastellen. Beweise die Korrektheit der insgesamt 4 Stellen, also dass die vierte Stelle der unendlichen Dezimaldarstellung dieselbe ist.

mittlere Aufgaben:

Aufgabe 8: **(5 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle von $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$. Zeige, dass

$$\frac{1}{6}\left(P(\frac{1}{2},0) + P(0,\frac{1}{2}) + P(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right) = \int_\Omega P(x,y)dxdy$$

für alle Polynome $P \in \text{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ von maximalem Grad 2.

Aufgabe 9: **(5 Punkte)**
Die diskrete Kosinustransformation ist durch

$$(DCT(f))_j := \sum_{k=0}^{n-1} f_k \, cos\left(\frac{\pi}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) j\right)$$

definiert, wobei die Stützstellen

$$x_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$$

gewählt werden.
Zeige, dass wir diese DCT mit Hilfe unserer DFT durch

$$(DCT(f))_j = 2n\left(DFT(\hat{f})\right)_j$$

berechnen können, wobei

$$\hat{f} = (0, f_0, 0, f_1, 0, f_2, 0, ..., f_{n-1}, 0, f_{n-1}, 0, f_{n-2}, ..., 0, f_1, 0, f_0)\,.$$