Technische Universität Berlin **Wintersemester 2015/2016**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

Ideen für 9. und 10. Übungsblatt

Hausaufgaben: (Abgabe wenn die Aufgaben auf richtigen Übungsblättern gestellt wurden)

Aufgabe 1: **(0 Punkte)**

Sei $f = (f_0, ..., f_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ und

$$d_j = (\mathrm{DFT}(f))_j = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot d^{-jk\frac{2\pi}{n}\cdot i}$$

Wir nennen $d = (d_0, ..., d_{n-1})$ die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) von f. Die Inverse DFT ist durch

$$(\mathrm{IDFT}(d))_j := \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{jk\frac{2\pi}{n}\cdot i} = f_j$$

definiert. Bezeichne mit $R : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : (\alpha_0, .., \alpha_{n-1}) \mapsto (\alpha_0, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}..., \alpha_1)$ den Operator, der die Reihenfolge der Stützstellen invertiert. Überprüfe, ob

$$\mathrm{DFT}^{-1} = \mathrm{IDFT} = n \cdot \mathrm{DFT} \circ R\,.$$

Aufgabe 2: **(0 Punkte)**

Sei durch

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ein Skalarprodukt auf L_2 definiert. Zeige, dass die Funktionen $\{f_j : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(jx)\}_{j\in\mathbb{N}}$ orthonormal sind. (Hinweis: Ihr könnt den Kosinus als Summe von komplexen Exponentialfunktionen schreiben. Achtung: Nicht durch Null teilen.)

Aufgabe 3: **(0 Punkte)**
Die discrete Kosinustransformation ist durch

$$(DCT(f))_j := \sum_{k=0}^{n-1} f_k\, cos\left(\frac{\pi}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) j\right)$$

definiert, wobei die Stützstellen

$$x_k = \frac{\pi}{2n}(2k + 1)$$

gewählt werden.
Zeige, dass wir diese DCT mit Hilfe unserer DFT durch

$$(DCT(f))_j = 2n\left(DFT(\hat{f})\right)_j$$

berechnen können, wobei

$$\hat{f} = (0, f_0, 0, f_1, 0, f_2, 0, ..., f_{n-1}, 0, f_{n-1}, 0, f_{n-2}, ..., 0, f_1, 0, f_0)\,.$$

Aufgabe 4: **(0 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $j = 0, ..., n-1$ die Stützstellen $x_j := j\frac{2\pi}{n}$ definiert, die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ äquidistant verteilt sind. Sei $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Definiere den Vektor $f = (f_0, ..., f_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ durch $f_j := g(x_j)$ für $j = 0, ..., n-1$. Zeige, dass g durch die Funktion

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{ikx}$$

interpoliert wird, falls $d = DFT(f)$.
Zeige, dass falls n gerade ist, dann g auch durch die Funktion

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(d_k e^{ikx} + d_{n-k-1} e^{-i(k+1)x} \right)$$

interpoliert wird.

Aufgabe 5: **(0 Punkte)**

Schreibe in Pseudocode oder Matlab einen rekursiven Algorithmus, der die DFT berechnet und mit $\mathcal{O}(n \log n)$ Operationen auskommt. Hierfür ist ein Lemma aus der Vorlesung hilfreich. (Hinweis: Aufteilungs- und Beschleunigungssatz)

Aufgabe 6: **(0 Punkte)**

Schreibe einen iterativen (das heißt ohne Rekursion) Algorithmus, der das gleiche kann und die gleiche asymptotische Laufzeit hat.

Aufgabe 7: **(0 Punkte)**
Führe die Polynomdivision mit Rest durch, um $P : x \mapsto (3x^3 + x^2 + 2x - 5)$ durch $S : x \mapsto (x - 2)$ zu teilen. Gesucht sind also Polynome Q und R, so dass $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, wobei der Grad von R echt kleiner als der Grad von S sein muss. Versuche, wenn möglich, dies ohne Literatur zu tun. Wenn nötig, übe dies mit selbstgewählten Polynomen. Dividiere 1 durch 3, 1 durch 5 und 1 durch 7 im Binärsystem per schriftlicher Division. Wenn nötig, übe dies.

Aufgabe 8: **(0 Punkte)**
Substitutionsregelbeispielaufgabe

Aufgabe 9: **(0 Punkte)**
Satz von Taylor Übung.

Aufgabe 10: **(0 Punkte)**
Ein Gleitkommaformat mit impliziter Eins (normalisierte Darstellung) habe eine Mantissenlänge von 11 bit und eine Exponentenlänge von 4 bit und ein Vorzeichenbit. Wie großist der maximale absolute Rundungsfehler einer Maschinenoperation.

Gib die Spiegelung an, die $(1, 3)^T$ auf $(3, -1)^T$ abbildet.

Gib eine allgemeine Formel an, für eine Spiegelung an einer Hyperebene, die den Punkt $v \in \mathbb{R}^n$ auf den Punkt $w \in \mathbb{R}^n$ abbilden soll. (Hinweis: v und w müssen im allgemeinen Fall nicht gleich lang sein und die Hyperebene muss nicht durch den Ursprung gehen.)