Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

9. Übungsblatt: Weihnachten

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 16. Januar 2019)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $j = 0, ..., n-1$ die Stützstellen $x_j := j\frac{2\pi}{n}$ definiert, die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ äquidistant verteilt sind. Sei $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Definiere den Vektor $f = (f_0, ..., f_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ durch $f_j := g(x_j)$ für $j = 0, ..., n-1$. Zeige, dass g durch die Funktion

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{ikx}$$

interpoliert wird, falls $d = DFT(f)$.
Zeige, dass falls n gerade ist, dann g auch durch die Funktion

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(d_k e^{ikx} + d_{n-k-1} e^{-i(k+1)x} \right)$$

interpoliert wird.

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**
Die diskrete Kosinustransformation ist durch

$$(DCT(f))_j := \sum_{k=0}^{n-1} f_k \, cos\left(\frac{\pi}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) j\right)$$

definiert, wobei die Stützstellen

$$x_k = \frac{\pi}{2n}(2k+1)$$

gewählt werden.
Zeige, dass wir diese DCT mit Hilfe unserer DFT durch

$$(DCT(f))_j = 2n \left(DFT(\hat{f})\right)_j$$

berechnen können, wobei

$$\hat{f} = (0, f_0, 0, f_1, 0, f_2, 0, ..., f_{n-1}, 0, f_{n-1}, 0, f_{n-2}, ..., 0, f_1, 0, f_0)\,.$$

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**

(a) Entwickeln Sie zur näherungsweisen Berechnung von

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\; dx\; dy$$

eine Quadraturformel, die auf der zweimaligen Anwendung der Simpsonregel beruht.

(b) Geben Sie eine Fehlerabschätzung für die Quadraturformel aus Teil (a) an. Dabei sei f als hinreichend oft stetig differenzierbar voraussgesetzt.

(c) Berechnen Sie mit der Quadraturformel aus Teil (a) das Integral

$$\int_1^3 \int_0^1 (xy-1)^3 \, dx \, dy.$$