Technische Universität Berlin **Wintersemester 2017/2018**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

7. Übungsblatt: SVD

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 14. Dezember 2017)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**
Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert eine eindeutige Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so dass:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A$$

(Das soll nicht bewiesen werden.)
Sei nun $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ die Menge aller $n \times m$-Matrizen von vollem Rang und $\varphi : \mathbb{R}_*^{n\times m} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ die Funktion, die eine Matrix von vollem Rang auf ihre Pseudoinverse abbildet. Zeige, dass φ stetig ist. Hinweis: Orthogonale Projektion.

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**
Zeige, dass die Singulärwertzerlegung weder eindeutig noch stetig ist, d.h. dass die Matrizen U, Σ und V nicht stetig von A abhängen. Bitte nur Gegenbeispiele aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ oder kleiner.

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**
In der Übung haben wir gesehen, dass zur Berechnung der PCA (principal component analysis) das Maximierungsproblem

$$\operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{R}^m, ||v||=1} v^T AA^T v$$

zu lösen ist, wobei wir annnehmen, dass $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollen Rang habe und $m \leq n$
Wie kann ich dieses Problem mittels Singulärwertzerlegung lösen.
Hinweis:

$$\operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{R}^m, ||v||=1} f(Qv) = Q^T \operatorname*{argmax}_{w\in\mathbb{R}^m, ||w||=1} f(w)$$

gilt für jede orthogonale Matrix Q. Falls sie dies verwenden, warum?