Technische Universität Berlin **Wintersemester 2016/2017**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

FFT-Lemma

Die Fouriertransformation

$$DFT : (f_0, ..., f_{n-1}) \mapsto (d_0, ..., d_{n-1})$$

ist definiert durch

$$d_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k}{n} j}$$

Es fällt auf, dass bei geradem j und geradem n der Term

$$e^{-2\pi i \frac{k}{n} j}$$

sich eine gerade Anzahl an Umdrehungen in der komplexen Ebene um den Nullpunkt dreht. Definiere $n = 2m$ und $j = 2l$. Genauer gesagt gilt dann

$$e^{-2\pi i \frac{k+m}{n} j} = e^{-2\pi i \frac{k+m}{2m} 2l} = e^{-2\pi i \frac{k+m}{m} l} = e^{-2\pi i \frac{k}{m} l} e^{-2\pi i l} = e^{-2\pi i \frac{k}{m} l} = e^{-2\pi i \frac{k}{n} j}.$$

Daraus ergibt sich das folgende Lemma:

Lemma 1. *Sei $n = 2m$ und $DFT(f_0, ..., f_{n-1}) = (d_0, ..., d_{n-1})$. Dann gilt*

$$d_{2l} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2}(f_k + f_{k+m}) e^{-2\pi i \frac{lk}{m}} = \left(DFT(\frac{1}{2}(f_0 + f_m), ..., \frac{1}{2}(f_{m-1} + f_{2m-1})) \right)_l$$

bzw.

$$d_{2l+1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2}(f_k - f_{k+m}) e^{-2\pi i \frac{k}{n}} e^{-2\pi i \frac{lk}{m}} = \left(DFT(\frac{1}{2}(f_0 - f_m) e^{-2\pi i \frac{0}{n}}, ..., \frac{1}{2}(f_{m-1} - f_{2m-1}) e^{-2\pi i \frac{m-1}{n}}) \right)_l$$

Beachte, dass die DFTs auf der rechten Seite nur DFTs auf Vektoren von halber Länge sind. Wir können nun also eine DFT der Länge $2m$ berechnen, indem wir zwei DFTs der Länge m berechnen und dann geeignet zusammenfügen.