Technische Universität Berlin **Wintersemester 2016/2017**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

7. Übungsblatt: SVD, Taylor

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 13. Dezember 2016)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**
[Aronszajn und Smith, 1961] Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $C > 0$, sodass für alle zweimal stetig differenzierbaren $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die folgende Abschätzung gilt: $||f'||_\infty \leq C(||f||_\infty + ||f''||_\infty)$.
Tipp: Benutze den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder den Satz von Taylor.
Bemerkung: Dieses Ergebnis wird in der Theorie der Sobolev-Räume durch eine Abschätzung von Aronszajn und Smith verallgemeinert. Für Funktionen f (auf einem eindimensionalen Gebiet) sieht diese so aus: $||f^{(i)}||_p \leq C(||f||_p + ||f^{(k)}||_p), i = 1, ..., k$. Dabei bezeichnet $||.||_p$ die L^p-Norm $||f||_p = \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p}$.

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**
Zeige oder widerlege folgende Aussage: A Sei eine quadratische Matrix von vollem Rang mit paarweise verschiedenen Singulärwerten. Dann ist die Singulärwertzerlegung bis auf das Vorzeichen der linken und rechten Singulärvektoren eindeutig.

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**
Es sei f eine Funktion, die zu gegebener Matrix A den größten Streckungsfaktor, also die induzierte euklidische Matrixnorm $||A||_2$ und einen Vektor x mit der Eigenschaft $||A||_2||x||_2 = ||Ax||_2$ ausgibt.
Sei nun A eine quadratische Matrix vollen Ranges mit paarweise verschiedenenen Singulärwerten. Wie kann f benutzt werden, um die Singulärwertzerlegung zu berechnen? Beweisen Sie ausreichend, warum Ihr Algorithmus die korrekte Zerlegung liefert.
Hinweis: Aufgabe 3 auf dem 4. Blatt.

Aufgabe 4: **(5 zusätzliche Punkte)**
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine beliebige Matrix und $A = U\Sigma V$ ihre Singulärwertzerlegung wobei $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_d$ die Singulärwerte sind und $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_d \\ \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Sei außerdem $||.||_2$ die von der euklidischen Vektornorm induzierte Operatornorm und $\mathcal{M}_r$ die Menge der $(n \times m)$-Matrizen von höchstens Rang r.
Es sei $B := U\Sigma_r V$ mit $\Sigma_r := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie dass B die beste Approximation an A in der gegebenen Norm ist, also dass

$$||A - B||_2 = \min_{C \in \mathcal{M}_r} ||A - C||_2.$$