Trigonometrische Interpolation - Diskrete Fourier-Transformation

Ziel ist es, periodische Funktionen an äquidistanten Stützstellen durch trigonometrische Polynome zu interpolieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Periodenlänge mit 2π und beschränken uns auf den Definitionsbereich $[0, 2\pi]$.

Wir möchten an den n Stützstellen

$$x_k = \frac{2\pi k}{n}$$

interpolieren, die im Abstand $\frac{2\pi}{n}$ über das Intervall $[0, 2\pi]$ verteilt sind. Bei einer gegebenen Funktion f interessieren wir uns nur für die Werte an den Stützstellen. Wir können f dann durch den Vektor seiner Werte an den Stützstellen $\hat{f} = (\hat{f}_0, ..., \hat{f}_{n-1})$ schreiben, wobei $\hat{f}_k := f(x_k)$.

Des weiteren betrachten wir den allgemeineren Fall, in dem $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion ist. Somit sei

$$\hat{f} \in \mathbb{C}^n$$

die Auswertung von f an den Stützstellen. Bemerke, dass wir auf diese Weise reellwertige Funktionen gleich mitbehandeln können.

Die Basisfunktionen für die Interpolationsaufgabe seien die Spiralen, die sich 0, 1, 2,... beziehungsweise $n-1$ mal entgegen dem Uhrzeigersinn um die reele Definitionsbereichsachse drehen

$$\varphi_j : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{ijx}$$

.

[Bild]

Wir können die Basisfunktionen ebenfalls diskretisieren und ihre Auswertung an den Stützstellen schreiben als

$$\omega_n^{jk} = \varphi_j(x_k)\,,$$

wobei ω_n die n-te Einheitswurzel $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ist.

Die Interpolationsaufgabe lautet nun: Finde die Koeffizienten $d = (d_0, ..., d_{n-1})$, so dass f durch die Linearkombination

$$\sum_{j=0}^{n-1} d_j \varphi_j(x)$$

interpoliert wird, also

$$f_k = \sum_{j=0}^{n-1} d_j \varphi_j(x_k) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j \omega_n^{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} d_j e^{\frac{ij2\pi k}{n}}.$$

Betrachte dazu das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \overline{g_k}$$

auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$.

Lemma 1. *Bezüglich dieses Skalarproduktes ist die Diskretisierung* $(\omega_n^{j0}, ..., \omega_n^{j(n-1)})$ *unserer Interpolationsbasis* φ_j *orthonormal.*

Proof. Dies ist leicht nachzurechnen, wenn folgendes Lemma bekannt ist. □

Lemma 2. *Es gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\omega_n^{jk} = \begin{cases} 1 & falls \quad j = 0 \\ 0 & \quad j = 1, ..., n \end{cases}$$

Proof. Der nichttriviale Fall ist der zweite, welcher sich als geometrische Reihe mit endlich vielen Folgengliedern entpuppt:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^j)^k = \frac{1-(\omega_n^j)^n}{1-\omega_n^j} = \frac{1-e^{ij\frac{2\pi n}{n}}}{1-e^{ij\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{ij\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

□

Wir können nun den Koeffizienten d_j finden, indem wir das Skalarprodukt von $\hat{f}$ und $(\omega_n^{j0}, ..., \omega_n^{j(n-1)})$, den disketisierten φ_j bilden (siehe Beitrag zu Projektionen in Teil 1 dieses Skriptes):

$$d_j = \langle \hat{f}, (\omega_n^{j0}, ..., \omega_n^{j(n-1)})_j \rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \overline{\omega_n^{jk}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \overline{e^{i\frac{2\pi}{n}jk}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{n}jk}$$

Die Abbildung $\hat{f} \mapsto d$ nennt sich Diskrete Foutier-Transformation (DFT) und die inverse Abbildung $d \mapsto \hat{f}$ Diskrete Fourier-Rücktransformation oder Inverse Diskrete Fourier-Transformation (iDFT).